HG
Revidert april 2011

Oversikt over tester i Econ 2130

La θ være en ukjent parameter (populasjons-størrelse) i en statistisk modell. Uttrykket "ukjent parameter" betyr at den "sanne" verdien av θ i populasjonen er ukjent. Når vi setter opp en statistisk modell (som representerer populasjonen vi trekker data fra), antar vi i utgangspunktet at modellen er sann for en viss (ukjent) verdi av parameteren θ og usann for alle andre verdier. Anførselstegnene rundt "sann" ovenfor skyldes at begrepet *sann parameterverdi* kun gir god mening dersom forutsetningene som er foretatt i modellen er realistiske forutsetninger om populasjonen.

I dette kurset har de hypotesene vi tester om (den "sanne" ukjente verdien av) θ tre alternative former beskrevet i tabellen under. Merk at θ_0 står for en *kjent* (!) hypotetisk verdi som er bestemt av den underliggende problemstillingen: Den sanne verdien av θ kan godt være lik θ_0, men behøver slett ikke være det! Problemet er nettopp at vi ikke vet hvor den sanne verdien av θ befinner seg.

Alternativ	H_0	H_1	Type
1	$\theta \le \theta_0$	$\theta > \theta_0$	Ensidig problem
2	$\theta \ge \theta_0$	$\theta < \theta_0$	Ensidig problem
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \ne \theta_0$	Tosidig problem

La $\hat{\theta}$ være en passende estimator for θ, slik at $W = \dfrac{\hat{\theta} - \theta}{SE}$ er tilnærmet (eventuelt eksakt) $N(0,1)$-fordelt (i noen tilfeller *t*-fordelt), og der SE er en eller annen estimert versjon av standardfeilen til $\hat{\theta}$. Vår testobservator, $Z = \dfrac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$ får vi da ved å bytte ut θ med θ_0 i *W*. *Z* kan brukes som testobservator i alle de tre alternative problemene.

Merk (NB!) forskjellen mellom *Z* og *W*: *W* er en *ikke-observerbar* stokastisk variabel med samme (tilnærmet) *kjente* fordeling uansett hva den sanne verdien av θ er (dvs *W* er en såkalt *pivotal*). *Z*, derimot, er en *observerbar* (siden θ_0 er en kjent verdi bestemt av problemet)

stokastisk variabel som er (tilnærmet) $N(0,1)$-fordelt (eller *t*-fordelt) *bare* hvis $\theta = \theta_0$ (for i så fall, og bare da, er $Z = W$). Hvis den sanne verdien θ er forskjellig fra θ_0, har *Z* en annen sannsynlighetsfordeling.

Siden $\hat{\theta}$ er en estimator for den ukjente (sanne) verdien av θ, har vi $\hat{\theta} \approx \theta$, hvorav $Z \approx \frac{\theta - \theta_0}{SE}$ som er > 0 hvis $\theta > \theta_0$ og < 0 hvis $\theta < \theta_0$. Derfor bør vi forkaste H_0 i problem-alternativ 1 hvis Z er tilstrekkelig stor positiv ($Z > c_1$). I alternativ 2 bør vi forkaste H_0 hvis *Z* er tilstrekkelig stor negativ ($Z < c_2$), og i alternativ 3 bør vi forkaste H_0 hvis *Z* enten er tilstrekkelig stor negativ eller tilstrekkelig stor positiv ($Z < c_3$ eller $Z > c_4$). c_1, c_2, c_3, c_4 er passende kritiske verdier. Som det beste kompromiss mellom to motstridende krav til kontroll av sannsynligheten for feil av type I og feil av type II, viser det seg at de kritiske verdiene c_1, c_2, c_3, c_4 i alle de tre alternativene enkelt kan bestemmes som løsningen av ligningen $P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = \alpha$, der α er det valgte signifikansnivået.. Merk at sannsynligheten i ligningen utvikles i det spesielle tilfellet at $\theta = \theta_0$ der *Z* er (tilnærmet) $N(0,1)$-fordelt. For eksempel i alternativ 3 får vi $\alpha = P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = P_{\theta=\theta_0}(Z < c_3) + P_{\theta=\theta_0}(Z > c_4)$. Velger vi $\alpha/2$ for begge sannsynlighetene (som kan vises er det beste valget) får vi $c_3 = -z_{\alpha/2}$ og $c_4 = z_{\alpha/2}$..

Tabell 1 Strukturen av Z-tester (Jfr. situasjon 1 og 3 i tabell 2 og alle tre situasjoner i tabell 3)

Alternativ	H_0	H_1	Testobservator	α-nivå test: Forkast H_0 hvis	$P-verdi$ (z_o er observert verdi av *Z*)
1	$\theta \le \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z > z_\alpha$	$P_{\theta=\theta_0}(Z > z_o)$
2	$\theta \ge \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z < -z_\alpha$	$P_{\theta=\theta_0}(Z < z_o)$
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \ne \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$	$2 \cdot P_{\theta=\theta_0}(Z > \lvert z_o \rvert)$

Mer konkret skriver vi ut nedenfor hvordan *Z*-testene ser ut for alternativ 1 i forskjellige modell-situasjoner i tabell 2 og 3. Alle testene er såkalte *Z*-tester. Eneste unntak er situasjon 2 i tabell 2 (t-test) der eneste forskjell er at $N(0,1)$-fordelingen er byttet ut med t_{n-1}-fordelingen.

Tabell 2 Tester for $H_0 : \mu \le \mu_0$ mot $H_1 : \mu > \mu_0$ (alternativ 1)når (*): $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavh. og identisk fordelte med $E(X_i) = \mu$ og $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$ (Jfr. regel 6.15 og 6.16. Tilsvarende for alternativ 2 og 3 med samme testobservator.)

Situasjon	*Forutsetninger (modell)*	*n*	σ	*Pivotal (W)*	*Testobservator* $Z = \dfrac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{SE}$	*Forkastning-kriterium*	*Signifkans-nivå*	$P-$*verdi* (z_o, t_o *er observert verdi av* Z, T)
1	(*) sammen med: $X_i \sim N(\mu, \sigma), \quad i = 1,2,\ldots,n$	Vilkårlig	Kjent	$\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z > z_\alpha$	Eksakt α	$P_{\mu=\mu_0}(Z > z_o)$
2	(*) sammen med: $X_i \sim N(\mu, \sigma), \quad i = 1,2,\ldots,n$	Vilkårlig	Ukjent	$\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T > t_{n-1,\alpha}$	Eksakt α	$P_{\mu=\mu_0}(T > t_o)$
3	Bare (*) der X_i er vilkårlig fordelt	n "stor", $n \ge 30$ (til nød ≥ 20)	Ukjent	$\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$Z > z_\alpha$	Tilnærmet α	$P_{\mu=\mu_0}(Z > z_o)$
4	Bare (*) der X_i er vilkårlig fordelt	n liten	Ukjent	**Ikke pensum**				

Merknad 1. I praksis er antakelig situasjon 3 den viktigste/vanligste. Løvås er dessverre litt knapp i omtalen av denne. Han nevner den kun i en bisetning (etter "eller" i den siste setningen i regel 6.16).

Merknad 2. Styrkefunksjonen er hos Løvås bare angitt i situasjon 1. Den kan naturligvis også bestemmes i de andre situasjonene, men er litt mer kompliserte og ikke pensum.

Merknad 3. Når det gjelder de to regresjonsparametrene, α og β, i regresjonsmodellen, $E(Y_i) = \alpha + \beta x_i$, er mønsteret for testing det samme som ovenfor. Hvis θ står for en av disse to parametrene og $\hat{\theta}$ er (minste kvadraters) estimator, blir pivotalen, $W = (\hat{\theta} - \theta) / SE(\hat{\theta})$ *t*-fordelt med $n-2$ frihetsgrader (merk 2-tallet!) for små n ($n < 30$), og tilnærmet N(0, 1) fordelt hvis *n* er stor (≥ 30). Det siste gjelder selv om Y_i-ene ikke er normalfordelte. Av dette kan vi lage konfidensintervall for θ, $\hat{\theta} \pm t_{n-2,\alpha/2} \cdot SE(\hat{\theta})$, (ikke samme α som i regresjonslinja), og lage testobservator $Z = (\hat{\theta} - \theta_0) / SE(\hat{\theta})$, som brukes på samme måte som ovenfor. For eksempel, hvis $H_0 : \theta \leq \theta_0$, $H_1 : \theta > \theta_0$, forkastes H_0 på nivå α (ikke samme α som i regresjonslinja) hvis $Z > t_{n-2,\alpha}$ (eller $Z > z_\alpha$ hvis $n \geq 30$ som gir tilnærmet nivå α). Detaljer om beregning av $\hat{\theta}$ og $SE(\hat{\theta})$ kan finnes i regresjon II notatet på nettet.

Tabell 3 Z-tester for alternativ 1 basert på regel 5.20 (normaltilnærming for binomisk, hypergeometrisk og poisson fordeling). Signifikansnivå tilnærmet α. (Tilsvarende for alternativ 2 og 3 som i tabell 1)

Modell	*Estimator* $\hat{\theta}$	*Betingelse for normaltilnærmelse*	*Pivotal (W)*	*Testobservator* $Z=\frac{(\hat{\theta}-\theta_0)}{SE}$	*Forkastning-kriterium*	$P-verdi$ *(z_o er observert verdi av Z)*
$X \sim \text{bin}(n,p)$	$\hat{p}=\frac{X}{n}$	$\text{var}(X)\geq 5$ $(np(1-p)\geq 5$	$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$	$Z>z_\alpha$	$P_{p=p_0}(Z>z_o)$
$X\sim$ hypergeom. (n,M,N) $(p=M/N)$	$\hat{p}=\frac{X}{n}$	$\text{var}(X)\geq 5$	$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1}}}$	$Z>z_\alpha$	$P_{p=p_0}(Z>z_o)$
$X \sim \text{pois}(t\lambda)$ [1]	$\hat{\lambda}=\frac{X}{t}$	$\text{var}(X)\geq 5$ $(t\lambda\geq 5)$	$\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\sqrt{\lambda/t}} \overset{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\hat{\lambda}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/t}}$	$Z>z_\alpha$	$P_{\lambda=\lambda_0}(Z>z_o)$

Merknad 4 Merk at vi (som i Løvås) har brukt p_0 og λ_0 i stedet for $\hat{p}$ og $\hat{\lambda}$ i SE i nevneren på *Z*. Dette er for å forbedre tilnærmelsen til normalfordelingen i ligningen $P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0)=\alpha$ til bestemmelse av den kritiske verdien. (Derfor trenger vi ikke å estimere SE i pivotalen her.) En alternativ test (ikke nevnt i pensum) er å bruke $\hat{p}$ og $\hat{\lambda}$ istedenfor i SE. Den test-varianten har tilnærmet de samme egenskapene som den foreslåtte og dukker ofte opp i litteraturen.

[1] Husk at notasjonen $X\sim \text{pois}(m)$ er valgt slik at det som står på m's plass alltid er lik $E(X)$ (som også er lik $\text{var}(X)$ i poisson-fordelingen). Hvis det for eksempel i en oppgave fremgår at $X\sim\text{pois}(3,7)$, følger automatisk at $E(X)=\text{var}(X)=3,7$. Av modellen i tabellen følger således at $E(X)=\text{var}(X)=t\lambda$.